Analyse Complexe
TD 12
Familles normales

Exercice 1

Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence 1. Pour $n \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

1. Montrer que la suite $(|S_n(z)|^{1/n})_{n\geq 1}$ est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si $z \in D$ vérifie $\sum a_k z^k \neq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} |S_n(z)|^{1/n} = 1$. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\overline{\lim}\ |S_n(z)|^{1/n} \leq 1$, alors $z \in \bar{D}$.
3. A l'aide du théorème de Montel, en déduire la théorème de Jentzsch : pour tout complexe ω de module 1, il existe une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_k$ et une suite de nombres complexes $(z_k)_k$, telles que pour tout k, z_k est un zéro de S_{n_k}, et que $z_k \to_k \omega$.

Exercice 2

Soit U un domaine de $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ une famille de $\mathcal{O}(U)$. On dit que $\mathcal{F}$ est *normale* si de toute suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\phi(n)})_n$ telle que $(f_{\phi(n)})_n$ converge uniformément sur les compacts de U soit vers une fonction holomorphe, soit vers l'infini.

1. Soit $z_0 \in U$, K un compact non vide de U, $r > 0$ et $\mathcal{F}$ une famille normale de $\mathcal{O}(U)$ telle que $|f(z_0)| \geq r$ pour toute $f \in \mathcal{F}$. Montrer qu'il existe un entier n telle que toute $f \in \mathcal{F}$ s'annule au plus n fois sur K.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que la famille
$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{O}(U), f(U) \subset \mathbb{C}\backslash D(a,r)\}$$
est normale.
3. Soit S un segment de longueur non nulle de $\mathbb{C}$. Montrer que la famille
$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{O}(U), f(U) \subset \mathbb{C}\backslash S\}$$
est normale.
4. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille
$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{O}(U), f(U) \subset \mathbb{C}\backslash \{a\}\}$$
n'est pas normale.

Pour les deux exercices suivants, on admettra la généralisation suivante [1] du théorème de Montel vu en cours :

Théorème. Si a, b sont deux nombres complexes distincts, U un domaine, et

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{O}(U), f(U) \subset \mathbb{C}\backslash \{a,b\}\}.$$

Alors $\mathcal{F}$ est une famille normale, au sens de l'exercice précédent.

Exercice 3

Soit U un domaine de $\mathbb{C}$.

1. Aussi due à Montel.

1. Soit $z_0 \in U$ et $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}(U)$, telle que la famille $(f_n)_n$ ne soit pas normale en z_0. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que pour tout ouvert V de U contenant z_0 et tout entier N,

$$\mathbb{C}\backslash\{a\} \subset \bigcup_{n \geq N} f_n(V).$$

2. Soit $z_0 \in U$, et $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{z_0\})$ admettant une singularité essentielle en z_0. Soit $r > 0$ assez petit pour que les fonctions

$$f_k(z) = f(z_0 + \frac{z - z_0}{k})$$

soient définies sur $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Montrer que la famille $(f_n)_n$ n'est pas une famille normale de fonctions holomorphes sur $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$.

3. En déduire le "grand théorème de Picard" : soit $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{z_0\})$ admettant une singularité essentielle en z_0, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que dans tout voisinage de a, f prenne toute valeur de $\mathbb{C}\backslash\{a\}$.

4. Déduire du grand théorème de Picard le petit théorème de Picard déjà rencontré dans les TD 5 et 7.

Exercice 4

1. Soit α un réel strictement positif, $0 < r < R$ deux réels. On considère

$$\mathcal{F}_\alpha = \{f \in \mathcal{O}(D), |f'(0)| \ \geq \alpha\}.$$

Montrer l'existence d'une constante ρ ne dépendant que de α, r, R telle que pour toute $f \in \mathcal{F}_\alpha$, l'une au moins des propositions suivantes soit vraie :
— $B(f(0), \rho) \subset f(D)$;
— $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z - f(0)| \leq R\} \subset f(D)$.

2. Notons $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{O}(D), |f'(0)| \geq 1\}$. Montrer l'existence d'une constante absolue $\delta > 0$ telle que si $f \in \mathcal{A}$, $f(D)$ contient un disque fermé de rayon δ. Ce disque peut-il être choisi centré en $f(0)$?
Cette question donne une preuve plus conceptuelle d'un résultat similaire à celui de l'exercice 8 du TD 2, mais moins précis, puisqu'il ne dit rien sur la constante δ. Pour mémoire, c'est cet énoncé quantitatif qui avait été utilisé dans l'exercice 6 du TD 5 pour donner une démonstration du petit théorème de Picard.